数理解析研究所講究録
844巻 1993年 126-137

semi-stable curveのJacobianのlog-代数幾何によるcompact化

東大数理 梶原 健 (Takeshi Kajiwara)

§0 序

簡単のため、本稿ではkを代数的閉体とする。Xをk上連結完備被約代数曲線で特異点をordinary double pointsしかもたない曲線(以下semi-stable curveと呼ぶ)とする。このとき、Xの一般ヤコビ多様体J_Xはsemi-abel多様体であり一般には完備とはならない。

$$J_X(k) = \{\text{次数}0\text{の}X\text{上の可逆層の同型類}\}$$

であるから、このような代数多様体J_Xの完備化、すなわちコンパクト化は、コンパクト化を与えるような可逆層を拡張した概念を追求することでありそれ自身興味深い問題と思われる。

このようなsemi-stable curve Xの一般ヤコビ多様体のコンパクト化は井草準一氏がはじめて研究[I]して以来、

Mumford, Mayer [MM], D'Souza [D], 浪川幸彦氏 [N] の仕事があげられるが、小田忠雄氏と C. S. Seshadri は X が既約でない場合も含めて一般ヤコビ多様体のコンパクト化を Geometric Invariant Theory を用いて X の偏極ごとに構成した。[OS] 彼らのコンパクト化 J_X^{cpt} の構造は X の双対グラフ $\Gamma(X)$ のコホモロジー群 $H^1(\Gamma(X), \mathbb{Q})$ の多面体分割を用いて記述でき、よいコンパクト化が満たすべき次の4つの性質をもつ [OS, Introduction]。

(1) $J_X^{cpt}(k)$ は X 上の幾何的な対象、rank 1 の torsion-free coherent $\mathcal{O}_X$-加群を表す。

(2) J_X は J_X^{cpt} に作用する。

(3) J_X^{cpt} は k 上 proper である。

(4) J_X^{cpt} は J_X の有限個の直和を open dense に含む。

本稿では、各既約成分が smooth である semi-stable curve の一般ヤコビ多様体のコンパクト化を Fontaine-Illusie の logarithmic scheme の理論 [Ka] を用いて $H^1(\Gamma(X), \mathbb{Q})$ のある弱い条件を満たす多面体分割ごとに構成する(§2, 定理)。ここで構成したコンパクト化は X 上の logarithmic structure から定義されるコホモロジー群と上述の多面体分割によって定義され、(2)~(4) の性質も満たす。また、ここでの構成法は J_X の torus part のコンパクト化を log. scheme の観点から直接構成し J_X のコンパクト化を構成しているため、簡明な

構成法である。(1)の性質や[OS]との関係については不明な点もあり今後の課題である。

§1 Logarithmic schemes

この§では，J.M. Fontaine，L. Illusie が考え加藤和也先生が研究され発展してきたlogarithmic scheme の理論を復習する[Ka]。

定義　Xをschemeとする．X上のpre-logarithmic structureとは，X上のZariski site X_{Zar}上の可換半群の層Mと半群の層の準同型$\alpha: M \to \mathcal{O}_X$（$\mathcal{O}_X$は乗法に関して半群とみなす）の組$(M,\alpha)$のことをいう。$X$上のpre-log. str. (M,α)が，

$$\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^*) \xrightarrow[\cong]{\alpha\text{の制限}} \mathcal{O}_X^*$$

を満たすとき，(M,α)をX上のlog. str.という。log. str.つきschemeのことをlog. schemeといい，(X,M,α)，あるいは単に(X,M)，$\underline{X}$（このとき，＿をとったXでunderlying schemeを表す）と表す。log. scheme間のmorphismは自然に定義する[Ka, (1.1)]。

注1）[Ka]でlog. str. をétale sheafで定義しているが、§2の命題1のsheaf versionの証明に必要なコホモロジー群の計算がZariskiコホモロジーでしかできていないので、ここではZariski sheafとしてlog. str. を定義する。

2）X上のpre-log. str. (M, α)に対し，自然なuniversalityをもつ(M, α)に伴うX上のlog. str. $(\tilde{M}, \tilde{\alpha})$が唯一つ存在する[Ka, (1.3)]。

例. 半群の準同型$\mathbb{N} \to k$ $(1 \mapsto 0, 0 \mapsto 1)$はSpec k上のpre-log. str. を定義し，それに伴うlog. str.つきschemeを(Spec k, $k^* \oplus \mathbb{N}$)と書く。ここで$\mathbb{N} = \{0, 1, \cdots\}$は加法に関して半群とみる。

(log. str.の逆像) $f: X \to Y$をschemesのmorphism，(N, β)をY上のlog. str.とする．合成$f^{-1}(N) \xrightarrow{f^{-1}(\beta)} f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$はX上のpre-log. str. を定義し，それに伴うlog. str. をNの逆像といい，f^*Nと書く。

定義 $\underline{S} = (S, M_S)$を(Spec k, $k^* \oplus \mathbb{N}$), XをS上の各既約成分がsmoothであるcurveとする。X上のlog. str. M_Xが$\underline{S}$上semi-stable型とは，各点$x \in X$に対し，あるxの開近傍Uが存在して，$M_X|U$がpre-log. str.

$$\begin{cases} \mathbb{N} \to f^{-1}\mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_X, & \text{xがsmooth pointのとき,} \\ \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to f^{-1}\mathcal{O}_{U_0} \xrightarrow{g} \mathcal{O}_U & \text{そうでないとき、$U \xrightarrow{g} U_0 = \mathrm{Spec}\, k[x,y]/(xy)$} \\ ((1,0)\mapsto x, (0,1)\mapsto y) & \text{$\to S$と, étale射gでfactorして.} \end{cases}$$

に伴うlog. str. にM_S上同型であるときをいう。ここで$f: X\to S$は構造射, $\mathbb{N}$は自然数のなす半群が定める定数層, それぞれのM_S上の構造は$\mathbb{N}\xrightarrow{id}\mathbb{N}$, $\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ $(a\mapsto(a,a))$によって与える。

一般のlog. schemeを扱うより次のfs log. schemeを扱う方が都合がよい。以下, log. schemeといえば, すべてfs log. schemeのことをいう。

定義 1) 可換半群Pに対し, Pがfine saturated (略してfs) とは, Pは有限生成可換半群で

(a) $\forall a, b, c\in P$に対し、$ab=ac$ならば$b=c$。

(b) $\forall a\in P^{gp}$に対し, ある$n\in\mathbb{Z}_{>0}$が存在して$a^n\in P$ならば, $a\in P$,

を満たすときをいう。ここで$P^{gp}=\{\frac{a}{b}; a, b\in P\}/\sim$ $(\frac{a}{b}\sim\frac{a'}{b'} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists c\in P \text{ s.t. } cab'=ca'b)$とする。条件(a)は準同型$P\to P^{gp}$ $(a\mapsto\frac{a}{1})$が単射であることと同値であり, この同一視により条件(b)を理解する。

2) (X, M_X)がfs log. schemeとは, 各点$x\in X$に対し, ある

xの開近傍U, fs 半群Pと準同型$P \to \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$が存在し，$M_X|_U$が$P \to \mathcal{O}_U$に伴うlog. str. と同型であるlog. schemeのことをいう。

§2 一般ヤコビ多様体のコンパクト化の定義

この§では，(S, M_S)を§1の例の$(\mathrm{Spec}\,k, k^* \oplus \mathbb{N})$とし，$X$を各既約成分がsmoothであるsemi-stable curve, $f: X \to S$をその構造射とする。Xの既約成分を$(X_i)_{i \in I}$, Xの特異点を$(Q_j)_{j \in J}$とする．また$\Gamma(X)$をXの双対グラフ，即ち，頂点集合がXの既約成分の添字集合I, 辺集合がXの特異点の添字集合Jとするグラフで，$X_i, X_{i'}$が点Q_jで交わるとき，そのときに限り頂点i, i'を辺jで結ぶとする。$\Gamma(X)$の向きを勝手に1つ固定する。

さて，S上semi-stable型log. str. をもつlog. scheme $\underline{X} = (X, M_X)$に対して，Xの一般ヤコビ多様体のコンパクト化を与えるlog. schemeを定義しよう。大雑把に言えば，従来$\mathcal{O}_X^*$を用いた定義のかわりにlog. schemeではM_Xに伴う群の層M_X^{gp}を用いて定義する。したがって，まず次数射$H^1(X, M_X^{gp}) \to \mathbb{Z}$を定義し，その核がlog-代数幾何での一般ヤコビ多様体である．これが従来の一般ヤコビ多様体のコンパクト化を与える。

命題1. $\underline{S}$, $\underline{X}$ を上のとおりとする。$p: \tilde{X} \to X$ を X の正規化とする。このとき、次の完全系列の可換図式が成立し、さらに右側の縦の準同型は同型写像である。

(1)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & k^* \otimes H^1(\Gamma(X), \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}^*) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \quad \text{完全} \\
0 \arrow[r] & \Gamma(S, M_S^{gp}) \otimes H^1(\Gamma(X), \mathbb{Z}) \arrow[r] & H^1(X, f^*M_S^{gp}) \arrow[r] & H^1(\tilde{X}, (fp)^*M_S^{gp}) \arrow[r] & 0 \quad \text{完全}
\end{tikzcd}$$

ここで、$f^*M_S^{gp}$, $(fp)^*M_S^{gp}$ はそれぞれlog. str. M_S の f, fp による M_S の逆像に伴う群の層である。

証明は完全系列

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X^* \arrow[r] \arrow[d] & p_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}^* \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{j \in J} k^* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & f^*M_S^{gp} \arrow[r] & p_*((fp)^*M_S^{gp}) \arrow[r] & \bigoplus_{j \in J} M_S^{gp} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

のコホモロジーをとればよい。命題1により(1)の左側の四角は(可換半群の圏での)push-outであるから、合成写像 $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}^*) \xrightarrow{\deg} \bigoplus_{i \in J} \mathbb{Z}$ と0-写像 $\Gamma(S, M_S^{gp}) \otimes H^1(\Gamma(X), \mathbb{Z}) \to \bigoplus_{i \in J} \mathbb{Z}$ によって、準同型 $d: H^1(X, f^*M_S^{gp}) \to \bigoplus_{i \in J} \mathbb{Z}$ を定義する。

次に $H^1(X, f^*M_S^{gp})$, $H^1(X, M_X^{gp})$ を比較する。完全系列

$$0 \to f^*M_S^{gp} \to M_X^{gp} \to \bigoplus_{j \in J} \mathbb{Z} \to 0$$

のコホモロジーをとって計算することで、次の命題を得る。

命題2 $\underline{S}$, $\underline{X}$ を前のとおりとする。このとき、完全系列

$$0 \to \bigoplus_{j \in J} \mathbb{Z} \to H^1(X, f^*M_S^{gp}) \to H^1(X, M_X^{gp}) \to 0$$

が成立する。

上の図式と上の準同型 $d: H^1(X, f^*M_S^{gp}) \to \bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}$ との関係は以下の可換図式で表される。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bigoplus_{j\in J}\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, bend left, "\partial"] & H^1(X, f^*M_S^{gp}) \arrow[r] \arrow[d, "d"] & H^1(X, M_X^{gp}) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\deg"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}\,\partial \arrow[r] & \bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z} \arrow[r, "\text{和}"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ここで ∂ は $\Gamma(X)$ の chain complex の boundary map $C_1(\Gamma(X), \mathbb{Z}) \to C_0(\Gamma(X), \mathbb{Z})$ を表す。これより $H^1(X, M_X^{gp})$ から $\mathbb{Z}$ への次数射が定義された。この図式に snake lemma を応用して

(2) $\quad 0 \to H_1(\Gamma(X), \mathbb{Z}) \to \tilde{J}_{\underline{X}}^{\log}(k) \to J_{\underline{X}}^{\log}(k) \to 0$ 完全

を得る。ここで $\tilde{J}_{\underline{X}}^{\log}(k) := \mathrm{Ker}\, d$, $J_{\underline{X}}^{\log}(k) := \mathrm{Ker}(\deg)$。

完全系列 (1), (2) が一般ヤコビ多様体の構成のキーポイントである。主定理を述べる前に log. scheme の Zariski 位相を定義する。

定義 $\underline{g}: \underline{U} \to \underline{V}$ が open immersion であるとは, $g: U \to V$ が open immersion かつ $g^*M_V \simeq M_U$ のときをいう。log. scheme $\underline{U}$ の covering $(\underline{U_i} \xrightarrow{\underline{g_i}} \underline{U})$ を, $\underline{g_i}$ が open immersion かつ $U = \bigcup_i g_i(U_i)$ と定義して, $\underline{S}$ 上の fs log. scheme の圏 $(fs/\underline{S})$ に Grothendieck 位相を定義する。

この位相で層化して(1), (2)と同様の完全系列が得られる．その証明は，既約位相空間上の定数層がflasqueであることと $M_X^{gp}/\mathcal{O}_X^*$ がlocally closed set上定数層となることを使う。

定義　反変関手 $\mathrm{Pic}_{\underline{X}}^{\log} : (fs/\underline{S}) \to Ab$ を前層

$$\underline{S}' \longmapsto H^1(\underline{X} \times_{\underline{S}} \underline{S}', M_{\underline{X} \times_{\underline{S}} \underline{S}'}^{gp})$$

に伴う層と定義する。また，命題1を層に拡張して $\deg : \mathrm{Pic}_{\underline{X}}^{\log} \to \mathbb{Z}$ を定義することができ，

$$J_{\underline{X}}^{\log} := \mathrm{Ker}(\deg : \mathrm{Pic}_{\underline{X}}^{\log} \to \mathbb{Z})$$

と定義する。

定理　$\underline{S} = (\mathrm{Spec}\, k, k^* \oplus \mathbb{N})$, X を各既約成分がsmoothなsemi-stable curve, $\Gamma(X)$ を X の双対グラフとする。また M_X を $\underline{S}$ 上semi-stable型の X 上のlog. str.，$\underline{X}$ を $\underline{S}$ 上のlog. scheme (X, M_X) とする。Σ を $H^1(\Gamma(X), \mathbb{Q})$ の多面体分割で次の i)～iii) を満たすものとする。

i) 任意の頂点 $v \in \Sigma$ に対し，

$$\#\{\Delta \in \Sigma ;\ v \text{ は } \Delta \text{ の face である}.\} < \infty$$

ii) $H_1(\Gamma(X), \mathbb{Z})$ を $H^1(\Gamma(X), \mathbb{Z})$ の部分群とみなしたとき[OS, I,4]，Σ は $H_1(\Gamma(X), \mathbb{Z})$ の作用（平行移動）で安定である。

iii) 任意の0でない $a \in H_1(\Gamma(X), \mathbb{Z})$，任意の $\Delta \in \Sigma$ に対し

$$(a+\Delta)\cap\Delta=\phi.$$

このとき，$J_{\underline{X}}^{\log}$ の部分層 $J_{\underline{X},\Sigma}^{\log}$（集合の層）で $\underline{S}$ − log. scheme $\underline{J}\to\underline{S}$ で表現可能で次の(1)〜(3)を満たすものが存在する。

(1) underlying schemes の射 $J\to S$ は proper である。

(2) underlying scheme J の各既約成分は，X の一般ヤコビ多様体 J_X を open かつ dense に含む。

(3) $\underline{J}$ には $\underline{S}$ の log. str. の逆像をもつ J_X が自然に作用する。（(2)の包含関係で同一視を与えたとき，この作用は J_X の積を延長した作用である。）

注 1) X が smooth のとき，$J_{\underline{X},\Sigma}^{\log}\simeq J_{\underline{X}}^{\log}$, $J\simeq J_X$.

2) $\underline{X}$ は $\underline{S}$ 上 log. smooth [Ka, 3] であり，$J_{\underline{X},\Sigma}^{\log}$ も $\underline{S}$ 上 log. smooth である。

定理の証明の概略　$(fs/\underline{S})$ から Ab への反変関手 $\underline{S}'\mapsto\Gamma(S', M_{S'}^{gp})$ (resp. $\underline{S}'\mapsto\Gamma(S', \mathcal{O}_{S'}^{*})$) を $\mathbb{G}_m^{\log}$ (resp. $\mathbb{G}_m$) と表す。多面体分割 Σ から $T^{\log}=\mathbb{G}_m^{\log}\otimes H^1(\Gamma(X),\mathbb{Z})$ の表現可能な部分層 $T_\Sigma^{\log}$ を定義する [Mum, 6]。$T_\Sigma^{\log}$ の各既約成分は S 上 proper で T を open かつ dense に含む。$T_\Sigma^{\log}$ の定義については [Kaj, 3]。完全系列(1)により J_X を $J_{\tilde{X}}$ 上の $T=\mathbb{G}_m\otimes H^1(\Gamma(X),\mathbb{Z})$ − torsor とみたとき，$T_\Sigma^{\log}$ を fibre にもつ J_X に伴う fibre 空間 $\tilde{J}_{\underline{X},\Sigma}^{\log}$ は表現可能な

層で、前層($\Sigma' \mapsto H^1(\underline{X} \times_S \underline{\Sigma}', f_{S'}^{*}M_S^{gp})$)に伴う層の部分層である。完全系列(2)と$\Sigma$の条件 i), ii) より $\tilde{J}^{\log}_{\underline{X},\Sigma}$ の $H_1(\Gamma(X), \mathbb{Z})$ による商 $J^{\log}_{\underline{X},\Sigma}$ が表現可能となる。$J^{\log}_{\underline{X},\Sigma}$ は $\mathcal{J} \to \Sigma$ で表現されるとする。$\mathcal{J} \to S$ が性質(1)を満たすことはΣの条件 i), $H^1(\Gamma(X), \mathbb{Z})$ における $H_1(\Gamma(X), \mathbb{Z})$ の指数が有限であり、$T^{\log}_{\Sigma}$ の既約成分が proper であることから従う。性質(2)は $T^{\log}_{\Sigma}$ の対応する性質より従う。性質(3)は、準同型 $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^1(X, M_X^{gp})$ によって J_X が $J^{\log}_{\underline{X},\Sigma}$ に作用し、この作用は定義から J_X の積を延長した作用である。　Q.E.D.

References

[D] C. D'Souza, Compactification of Generalized Jacobians, Thesis, Tata Institute, Bombay, 1973.

[I] J. Igusa, Fiber systems of Jacobian varieties. I, II, III, Amer. J. Math. 78 (1956) 177–199; 745–760; 81 (1959), 453–475.

[Ka] K. Kato, Logarithmic structures of Fontaine-Illusie, in "Geometry, and Number Theory", The Johns Hopkins Univ. Press., 1989, 191–224

[Kaj] T. Kajiwara, Logarithmic compactifications of the generalized Jacobian variety, preprint.

[Mum] D. Mumford, An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings, Compositio Math. 24 (1972), 239-272.

[MM] A. Mayer and D. Mumford, Further comments on boundary points, Amer. Math. Soc. Summer Institute, Woods Hole, Mass, 1964

[N] Y. Namikawa, A new compactification of the Siegel space and degeneration of abelian varieties. I, II, Math. Ann. 221 (1976), 97-141, 201-241.

[OS] T. Oda and C.S. Seshadri, Compactifications of the generalized Jacobian variety, Trans. of Amer. Math. Soc., 253 (1979), 1-90.